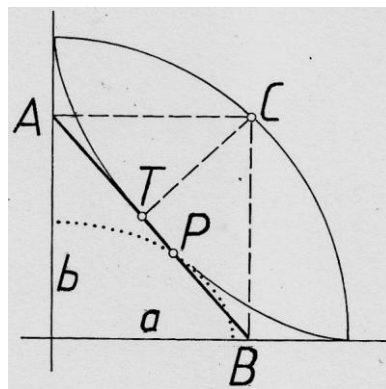


A „LECSÚSZÓ” KÖR ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIÁJA

Írta: Hajdu Endre

Geometriai, kinematikai tankönyvekben gyakran találkozhatunk annak az AB szakasznak a példájával, melynek végpontjai egy derékszöget bezáró egyenes páron mozognak (1. ábra). Mivel a továbbiakban szükség lesz egy ilyen mozgást végző szakasszal kapcsolatos geometriai tudnivalókra, röviden áttekintjük azokat:

- míg a szakasz „függőleges” helyzetéből „vízszintes” helyzetébe jut, helyzeteinek burkoló görbéje egy astrois görbe negyede;
- a szakasz mozgása elemi elforgatások sorozata, melyeknek folyamatosan változó C momentán centruma negyedkört ír le a mozgás során;
- a szakasz és az astrois pillanatnyi érintkezési pontja a C momentán centrumnak a szakaszra vonatkozó T talppontja;
- a szakasznak a végpontjaitól különböző tetszőleges P pontja negyedellipszis-ívet ír le, mely ellipszis fél tengelyhosszai $a = AP$ ill. $b = PB$.

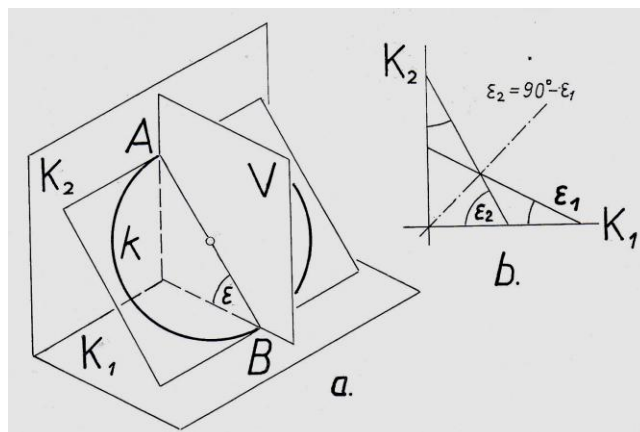


1. ábra

A szakasz imént tárgyalt mozgása, melyet úgy is képzelhetünk, hogy a szakasz „függőleges” helyzetéből lecsúszik „vízszintes” helyzetébe; ilyen szóhasználattal élve érthetővé válik a címben szereplő lecsúszó kör kifejezés.

Ha mozgó kör által leírt felületekről esik szó, elsősorban a gömb, a hengerek, esetleg a tórusz jut eszünkbe, de egy könnyen elgondolható, nem is bonyolult mozgású kör az említettektől igen eltérő felületet ír le, melynek csupán elképzelése is nehézséget jelenthet.

Ha egy k kör AB átmérője a fentebb tárgyalt módon mozog a két képsíkra merőleges V vetítősíkban úgy, hogy végpontjai a vetítősík nyomvonalain haladnak, miközben a kör síkja merőleges a vetítősíkra (2. ábra), akkor a kör felületet ír le, a címben szereplő alakzatot.



2. ábra

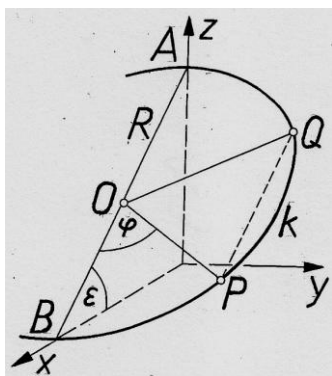
A továbbiakban tehát arról a felületről lesz szó, melyet egy k kör (vonall) helyzeteinek összessége alkot, miközben AB átmérőjének ε első képsíkszöge 90° -tól 0° -ig csökken. Más szóval: a második képsíkban lévő, s az első képsíkot érintő kör lecsúszik az első képsíkban lévő véghelyzetébe. A mozgás során elfoglalt körhelyzetek összessége alkotja a felületet. A mellékábrából, mely oldalnézetben ábrázolja a mozgó kör két olyan helyzetét, melyben a kör síkjának első, ill. második képsíkszöge egyenlő, világos, hogy a felület szimmetrikus a két képsík egyik szögfelező síkjára. Vagyis a felületet leíró kör minden helyzetének megfelel egy másik körhelyzet, melyet a lecsúszás során később vesz fel. A nem könnyen elképzelhető felületről szemléletes képet kívánunk nyerni. Mindenekelőtt felírjuk a felület egyenletét; Gauss-féle $\mathbf{r}(u,v)$ megadással élve. A 3. ábra szerint elhelyezkedő, R sugarú k kör síkjának első képsíkszöge legyen a felület egyik paramétere: $u = \varepsilon$, a másik paraméter a kör szóban forgó pontjához tartozó körsugárnak az OB sugárral bezárt $v = \varphi$ szöge. A két paraméterrel a koordináták a következők:

$$x = (R+R \cos v)\cos u = R \cos u(1+\cos v)$$

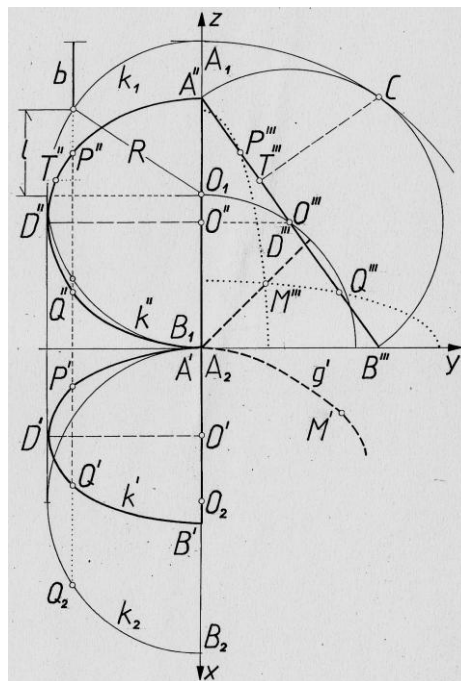
$$y = R \sin v$$

$$z = (R-R \cos v)\sin u = R(1-\cos v)\sin u.$$

Már itt megjegyezzük, hogy adott x, y koordináta-hoz két különböző z érték tartozhat, amely ténnyel később foglalkozunk.



3. ábra



4. ábra

Az egyenlet még nem nyújt szemléletes képet a felületről, ezért az ábrázoló geometria eszközeivel folytatjuk a vizsgálódást. Ha a kör átmérője A_1B_1 kezdő helyzetéből elmozdulva valamely AB helyzetbe, középpontja O_1 -ből O -ba jut, az elmozdult kör első és második képe egy-egy ellipszis, mely vetületeknek a 4. ábra csak egyik felét ábrázolja.

Az oldalnézet nyilván szakasz, mivel a kör síkja merőleges a 3. képsíkra. Míg a mozgó kör mindkét képe alakját változtató ellipszis, a harmadik kép vetülete állandó hosszúságú szakasz, melynek mozgása – mint a bevezetőben láttuk – minden helyzetében egy folyamatosan változó C momentán centrum körüli pillanatnyi forgás.

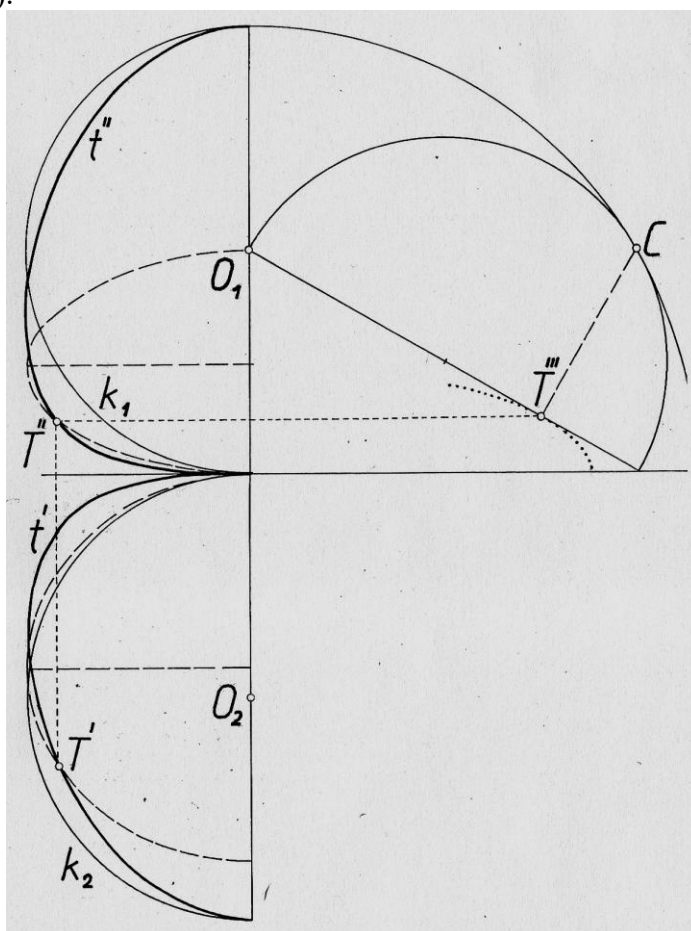
A kör AB átmérőjére merőleges valamely húrjának minden pontja, tehát a húr két végpontja is egybevágó ellipszisíveket ír le, ezért a mozgó kör pontjai által leírt felületi görbék ellipszis -

ívek. Kivételt az AB átmérő - végpontok által leírt szakaszok, valamint az AB -re merőleges DE átmérő végpontjainak negyedkör - ív pályagörbéi jelentenek (az E pont a hiányzó vetület - részre esik).

A D átmérővégpont által leírt pályagörbe minden pontjához két, azonos első vetítősíkban lévő felületi érintő tartozik: a negyedkör érintője és a k kör érintője. Az elmondottakból következik, hogy a D által leírt negyedkör a felületnek első kontúrgörbéje, melynek párja a felület meg nem rajzolt felén lévő E pont pályagörbéje. A k körnek az első képsíkban lévő k_2 véghelyzete is első kontúr, mert a felületi ellipszisek tengelypontjainak – például Q_2 – érintői az első képsíkra merőlegesek.

Hasonló módon látható be, hogy a D pont által leírt negyedkör egyben második kontúrgörbe is, csakúgy, mint a k kör k_1 kezdő helyzete.

Az oldalnézeten a mozgó kör - helyzetek vetületei azonosak a V síkban mozgó átmérő vetületeivel, melyek burkológörbéje a már említett astrois, ezt most az ábra nem tünteti fel. Egy - egy szakasz (körvetület) és az astrois érintkezési pontja az aktuális C momentán centrumnak a szakaszra vonatkozó T talppontja. Az ilyen módon nyert pontok első és második képét a megfelelő körvetületeken kijelölve kapjuk a t görbét, a harmadik kontúr - görbét (5. ábra).



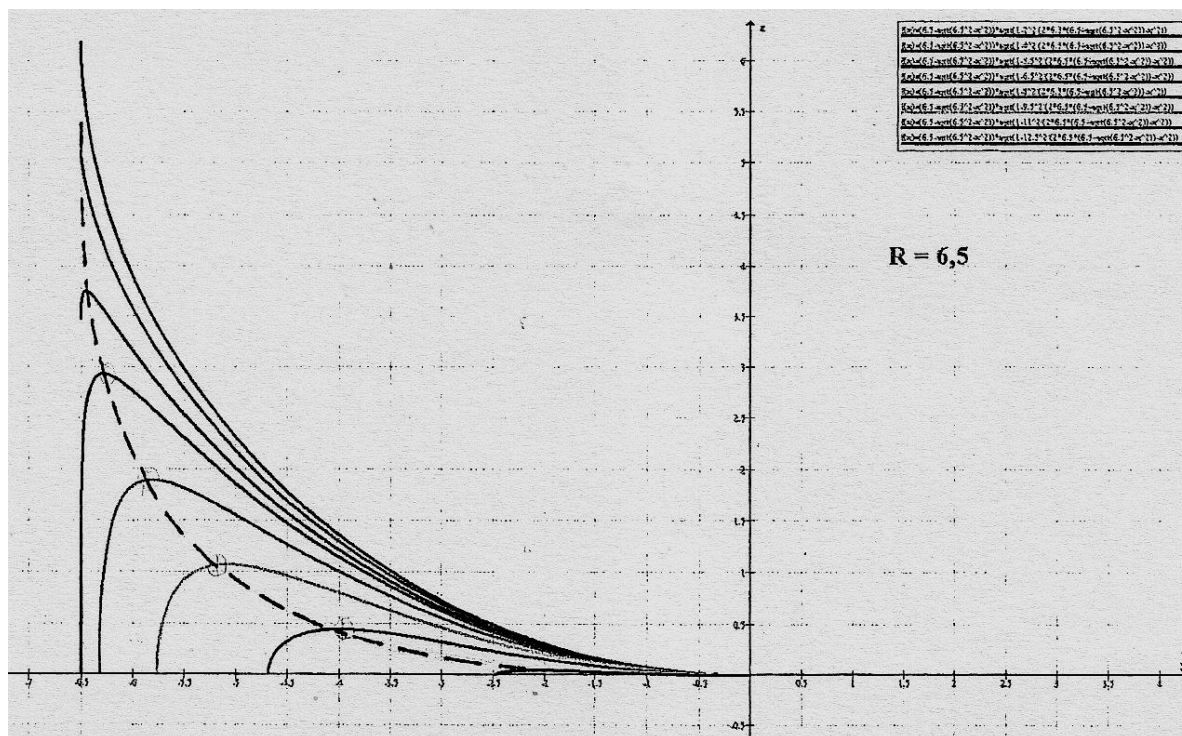
5. ábra

Nem nyilvánvaló az utóbbi állítás, mert elgondolható, hogy t csupán olyan élgörbéje a felületnek, mint amilyen egy csésze vagy pohár pereme. Az állítás helyességének belátása végett gondoljuk meg, hogy a felület minden – általános – pontjában meghatározza az érintősíkot az adott pontot tartalmazó két felületi görbe – most egy kör és egy ellipszisív – érintője. A T pontban e két görbe érintőinek 3. vetületei egybeesnek, vagyis az általuk meghatározott érintősík merőleges a harmadik képsíkra.

A 6. ábra feltűnteti a felületnek néhány, a második képsíkkal párhuzamos metszetét, melyek - nek a szaggatott vonallal rajzolt t görbére eső pontjaiban az érintő – igazolva, hogy t valóban harmadik kontúr – „vízszintes”, vagyis a harmadik képsíkra merőleges. Megemlítjük, hogy az említett görbék egyenletei, melyek az

$$x = R \cos u (1 + \cos v), \quad y = R \sin v, \quad z = R \sin u (1 - \cos v)$$

alakú (megfelelő indexű) képletek felhasználásával adódnak, a következők:



6. ábra

$$z_1 = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{(R + \sqrt{R^2 - y^2})^2}} (R - \sqrt{R^2 - y^2}), \quad 0 \leq x \leq 2R;$$

$$z_2 = \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{(R - \sqrt{R^2 - y^2})^2}} (R + \sqrt{R^2 - y^2}), \quad 0 \leq x \leq R.$$

A fenti két függvény a felület két részének egyenlete: az első egyenletnek megfelelő felület - darabot a kör k_1 kezdőhelyzetének „alsó” félköre írja le, vagyis az, melynek pontjaira érvényes: z legfeljebb R . A felület másik, az alsó függvénynek megfelelő részét a „felső” félkör írja le.

A felületnek van önáthatási görbéje!

A k kör kezdőhelyzetén a 4. ábra P és Q pontjának pályagörbéi negyedellipszisek, melyek a harmadik képen szimmetrikusak az origón átmenő, 45° képsíkszögű egyenesre. Az ábra két pályagörbéje az M pontban metszi egymást, mely nyilván pontja a felületnek. Az ilyen módon szerkeszthető pontok olyan g görbét alkotnak, melynek első és második képe az y tengelyre szimmetrikus. A g görbe valójában a k kör imént említett két félköríve által leírt felületek közös része. A 4. ábra zsúfoltságának elkerülése végett a g önáthatási görbe egyik felének első képe van csak megrajzolva és betűzve. Oldalnézetét szaggatott vonal ábrázolja (betűzés nélkül). Az ábra oldalnézetéből kitűnik, hogy a g görbe M pontjának x és z koordinátái

egyenlők, mint a megfelelő ellipszisek közös pontjainak koordinátái. Ez utóbbiak kapcsolatának megállapítása végett először meghatározzuk az adott y -hoz tartozó ellipszisek adatait: az előlnézetéről leolvashatóan

$$l = \sqrt{R^2 - y^2} \quad , \quad b = R - l, \quad a = 2R - b = R + l.$$

$$l \text{ fenti alakját behelyettesítve: } a = R + \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Az egyik ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, de mivel $z = x$, az egyenlet így is érvényes:

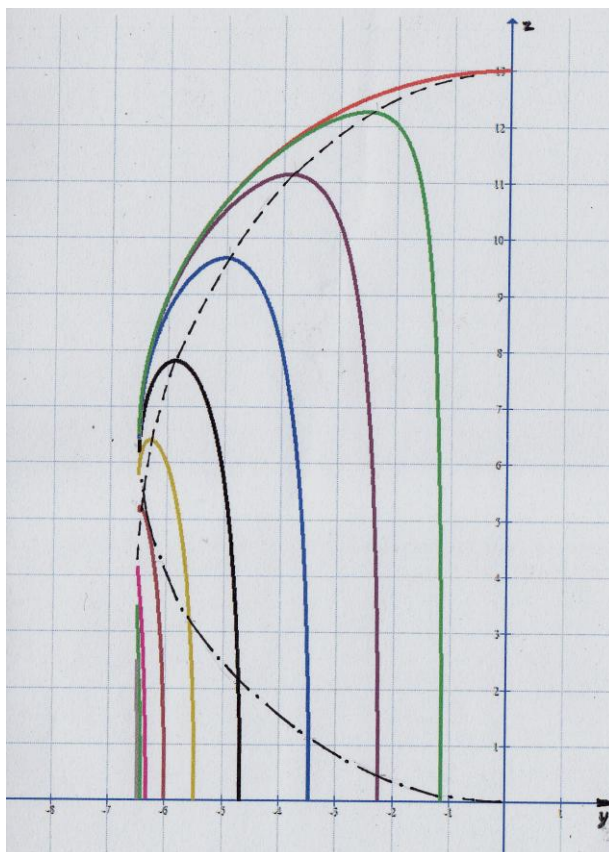
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ melyből } x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ A fentebb látható } a \text{ és } b \text{ kifejezéseket } x \text{ képletébe}$$

helyettesítve nyerjük a tetszőleges y koordinátához tartozó x -et:

$$x = \frac{y^2}{\sqrt{4R^2 - 2y^2}}.$$

A felületnek az „alsó félkör” által leírt részéről már némileg szemléletes képet nyújtott a 6. ábra, mely a felületnek a második képsíkkal párhuzamos metszeteit mutatja.

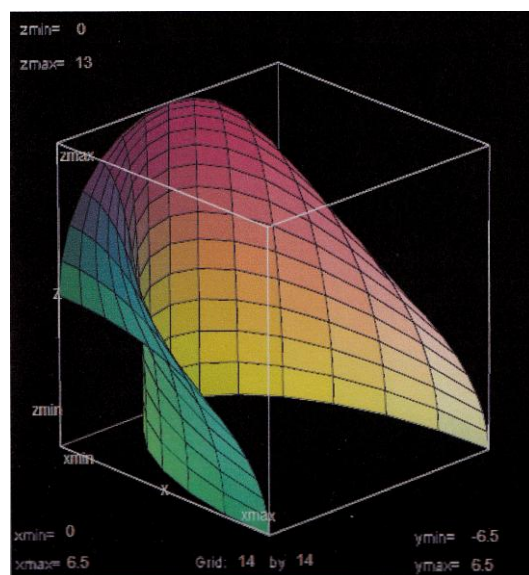
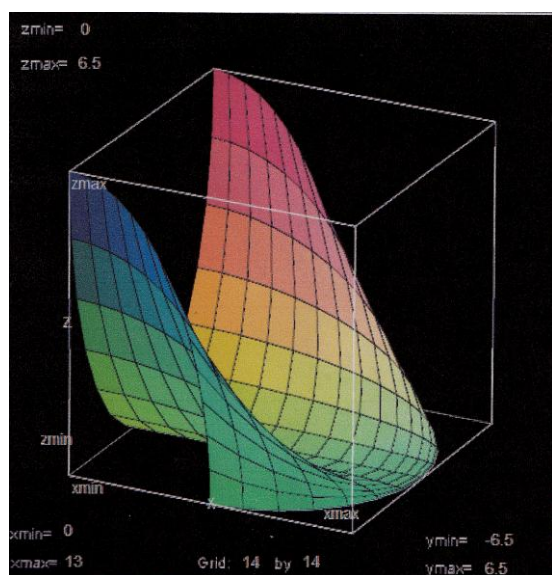
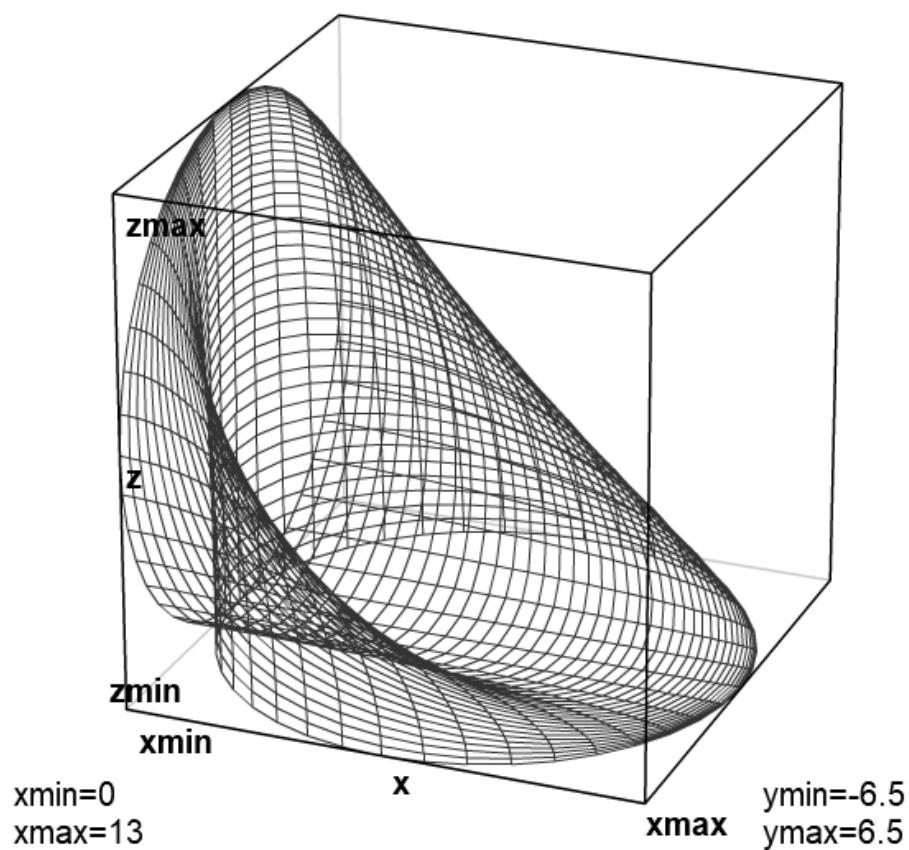
A felületnek a „felső félkör” által leírt részéről hasonló módon szerkesztett metszeteit mutat a 7. ábra, ezúttal is feltüntetve szaggatott vonallal a 3. kontúrgörbét. Ezen az ábrán pont - vonallal rajzolva látható a g önáthatási görbe is.



7. ábra

Végül a felület axonometrikus képét szemlélteti a 8. számítógépi úton nyert ábra.

zmin=0
zmax=13



8. ábra